Auswertung von B-Splines

Olaf Merkert — 27. April 2009

1 Carl de Boor

Carl de Boor wurde 1937 im heutigen Polen geboren, nach dem Krieg musste die Familie aber nach Schwerin fliehen. Als er 1955 wegen unzureichender mathematische Fähigkeiten nicht zum Chemie-Studium an der Humboldt Universität (in Ost-Berlin) zugelassen wurde, "verlängerte" er seinen Aufenthalt in Westdeutschland und studierte in Hamburg Mathematik. Dank guter Beziehungen gelangte er später nach Harvard, als Assistent für Birkhoff, über den er zu General Motors kam.

Dort lernte er B-Splines kennen. Er erkannte früh ihre Bedeutung und beschäftigte sich auch in seiner Promotion damit. 1966 schloß er diese ab und wurde Professor für Mathematik und Informatik an der Purdue Universität. Dort schrieb er den hier vorgestellten Artikel *On Calculating with B-Splines* [1], der die Anwendungen von Splines revolutionierte. 1972 ging er an die Universität von Wisconsin-Michigan, wo er mit dem Erfinder der Splines, I. Schoenberg, zusammenarbeiten konnte. Als Emeritus kann er heute auf eine Vielzahl von Veröffentlichungen und Auszeichnungen zurückblicken. Seine Implementationen von Splinealgorithmen sind heute noch im Einsatz, z.B. in der Spline-Toolbox von Matlab.

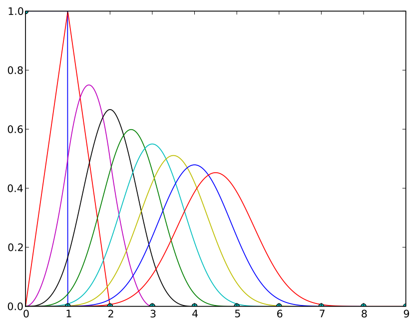
2 Anwendungen

Spline-Kurven, insbesondere Bézier-Kurven, sind sehr wichtig für Vektorgrafik- (z.B. Illustrator oder Inkscape, sowie Pfade in GIMP) und CAD-Anwendungen (Automobil- und Flugzeugkonstruktion). Auch in Animationswerkzeugen (z.B. After Effects, Flash oder Blender) kommen Spline-Kurven für glatte Bewegungen zum Einsatz.

Schließlich benutzen wichtige Schriftformate wie TrueType, PostScript und MetaFont (TEX!!) Bézier-Splines zur Beschreibung der Typen.

3 B-Splines

Splinefunktionen sind stückweise Polynome, die an den Bruchstellen bis zu einer gewissen Ordnung differenzierbar sind. $\pi = (t_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ mit $t_i \leq t_{i+1}$, eine aufsteigende Zerlegung des Intervalls $[\lim_{i\to-\infty} t_i, \lim_{i\to+\infty} t_i]$, erzeugt einen Raum von Splinefunktionen, wo die t_i die Bruchstellen sind.



Definition 1. Für $k \geq 1$ definiert man *Stutzfunktionen*:

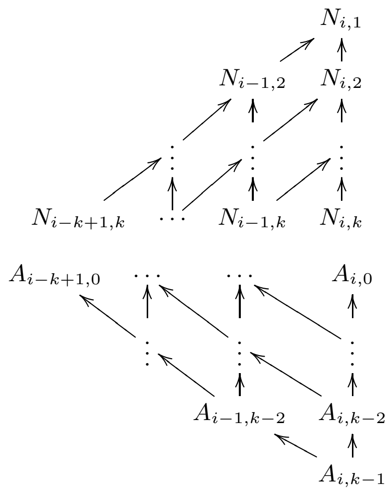
$$g_k(s;t) = (s-t)_+^{k-1} = \begin{cases} (s-t)^{k-1} & \text{falls } s \geq t \\ 0 & \text{falls } s < t \end{cases}$$

Definition 2. *Normierte B-Splines* sind dann für $i \in \mathbb{Z}$ und $k \geq 1$ definiert durch dividierte Differenzen[1]

$$N_{i,k}(t) = (t_{i+k} - t_i)\, g_k(t_i, \ldots, t_{i+k}; t) \qquad (1)$$

[1] Man kann dividierte Differenzen auch für mehrfach auftretende Interpolationspunkte definieren.

Entscheidend für die Entwicklung der Algorithmen ist folgende Identität[2]:



Proposition 3.

$$N_{i,k}(t) = \frac{t - t_i}{t_{i+k-1} - t_i} N_{i,k-1}(t) + \frac{t_{i+k} - t}{t_{i+k} - t_{i+1}} N_{i+1,k-1}(t) \qquad (2)$$

Jetzt betrachtet man

$$F(t) = \sum_i A_i \, N_{i,k}(t)$$

Man findet eine weitere Rekursionsformel:

$$A_{i,j}(t) = \begin{cases} A_i, & j = 0 \\ \frac{t-t_i}{t_{i+k-j}-t_i} A_{i,j-1}(t) + \frac{t_{i+k-j}-t}{t_{i+k-j}-t_i} A_{i-1,j-1}(t), & j > 0 \end{cases} \qquad (3)$$

sodass

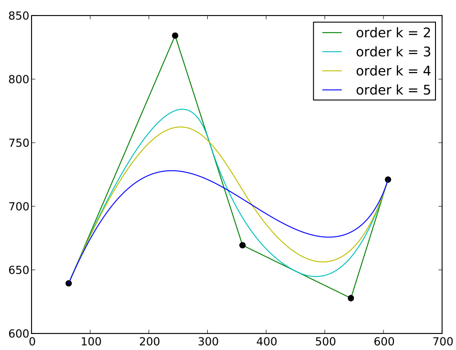
$$F(t) = \sum_i A_{i,j}(t) \, N_{i,k-j}(t)$$

Mit $N_{i,1} = \chi_{[t_i,t_{i+1})}$ bekommt man

$$F(t) = A_{i,k-1}(t), \quad t_i \leq t < t_{i+1} \qquad (4)$$

4 Spline-Kurven

Spline-Kurven werden über Kontrollpunkte $(x_0, y_0), \ldots, (x_{n-1}, y_{n-1})$ und die Ordnung k gesteuert. Man bekommt eine parametrische Kurve



$$X(t) = \sum_{i=0}^{n-1} x_i \, N_{i,k}(t) \qquad Y(t) = \sum_{i=0}^{n-1} y_i \, N_{i,k}(t),$$

wobei die $N_{i,k}$ durch die Spline-Kurven-Zerlegung erzeugt sind.

Definition 4. Die *Spline-Kurven-Zerlegung* der Länge n und Ordnung k, notiert $\pi_{n,k} = \{t_i\}_{i=0,\ldots,n+k}$ wird als Zerlegung des Intervalls $[0, n-k+1]$ wie folgt definiert:

$$t_i = \begin{cases} 0, & i \leq k-1 \\ i-k+1, & k-1 < i \leq n \\ n-k+1, & n < i \end{cases}$$

Literatur

[1] Carl de Boor. On calculating with b-splines. *Journal of Approximation Theory*, (6):50–62, 1972.

[2] Carl de Boor. *Splinefunktionen*. Birkhäuser, 1990.

[3] J. A. Adams D.F. Rogers. *Mathematical Elements for Computer Graphics*. McGraw-Hill Book Company, 1976.

[4] Y.K. Leong. Carl de boor: On wings of splines. *Imprints*, 5, 2004. Newsletter of Institute for Mathematical Sciences, National University of Singapore.

[2] Aus dieser Identität kann man übrigens noch viele weitere Eigenschaften der B-Splines ableiten.