GEGENBEISPIEL VON FEJÉR

Proseminar Analysis, HS 2007

Olaf Merkert

22. November 2007

1 Zielsetzung und Definition

Um zu verstehen, warum für die punktweise Konvergenz der Fourierreihe einer Funktion die Stetigkeit der Funktion nicht hinreichend ist, wollen wir ein Gegenbeispiel einer stetigen Funktion finden, deren Fourierreihe in (mindestens) einem Punkt nicht konvergiert.

Wir werden zunächst einen Kandidaten für eine solche Funktion aufstellen und dann der Reihe nach die verschiedenen Kriterien überprüfen, die Stetigkeit, die Periodizität und die Divergenz der Fourierreihe in einem Punkt.

Wir definieren zunächst für $n \in \mathbb{N}$ folgende Hilfsausdrücke:

$$h_n(x) := \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(k\,x)}{k} \qquad g_n(x) := 2\,\sin(2n\,x)\;h_n(x) \tag{1}$$

Außerdem definieren wir eine Folge natürlicher Zahlen:

$$N_j := 2^{(j^2)} \qquad j \in \mathbb{N} \tag{2}$$

Unsere eigentliche Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sieht dann folgendermaßen aus:

$$f(x) := \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2}\, g_{N_j}(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2}\, 2\,\sin\left(2N_j\,x\right) \sum_{k=1}^{N_j} \frac{\sin(k\,x)}{k} \tag{3}$$

2 Stetigkeit der Funktion

Bei unserer Funktion f handelt es sich um eine unendliche Reihe stetiger Funktionen. Wir zeigen zuerst (in mehreren Schritten) die gleichmäßige Konvergenz dieser Reihe.

Behauptung 1 *Es gibt $K \in \mathbb{R}$, so dass für alle $x \in [0, \pi]$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $|h_n(x)| \leq K$. Kurz, h_n ist unabhängig von n beschränkt im Intervall $[0, \pi]$.*

Beweis:

Man betrachte die Ableitung:

$$h'_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \cos(k\,x)$$

Nun benutzen wir den Dirichlet-Kern im Reellen:

$$D_n(x) := \sum_{k=-n}^{n} \exp(\mathrm{i}\,k\,x) = 1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos(k\,x)$$

Mit der „Randbedingung“ $h_n(0) = 0$ können wir so die folgende Beziehung aufstellen:

$$h_n(x) = \frac{1}{2}\int_0^x D_n(t)\mathrm{d}t - \frac{x}{2} \text{ für } x \in [0, \pi]$$

Wir kennen bereits eine Abschätzung für dieses Integral (Vortrag über den Dirichlet-Kern):

$$0 \leq \int_0^x D_n(t)\mathrm{d}t \leq 2\pi \text{ für } x \in [0, \pi]$$

Da $0 \leq \frac{x}{2} \leq \frac{\pi}{2}$, folgern wir mit der $\triangle$-Ungleichung, dass $|h_n(x)| \leq 2\pi$ im Intervall $[0, \pi]$.[1] □

Behauptung 2 *Die unendliche Funktionenreihe $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} g_{N_j}(x)$ konvergiert gleichmäßig auf $\mathbb{R}$.*

Beweis:

Aus der vorhergehenden Behauptung und der Definition (1) folgt sofort, dass auch g_n auf $[0, \pi]$ beschränkt ist. Wir finden gemäß Behauptung 1 eine Schranke $K \in \mathbb{R}$, so dass $|g_n(x)| \leq 2\,K$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x \in [0, \pi]$. Da g_n eine gerade Funktion ist (Es ist Produkt zweier ungerader Funktionen), gilt $|g_n(x)| \leq 2\,K$ auch für $x \in [-\pi, \pi]$ und, da g_n 2π-periodisch, sogar für $x \in \mathbb{R}$.

Damit finden wir eine konvergente Majorante von f, nämlich $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} 2\,K$.

Also konvergiert die Reihe gleichmäßig. □

Wir folgern, dass f als Grenzwert der unendlichen Reihe stetig ist, da alle Glieder der Reihe stetig sind. Außerdem ist f beschränkt und 2π-periodisch.

[1] Diese Schranke ist offensichtlich recht grob gewählt, reicht aber für unsere Zwecke vollkommen aus.

3 Fourierreihe und Divergenz

Um die Fourierreihe von f zu finden, werden wir nun einige trigonometrischen Umformungen auf g_n durchführen:

$$2\,\sin(2n\,x)\ \sin(k\,x) = \cos\left((2n-k)\,x\right) - \cos\left((2n+k)\,x\right) \tag{4}$$

Dies leitet man ab aus der Formel

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta),$$

die man zweimal auf die rechte Seite von (4) anwendet:

$$\begin{aligned}
&\cos\left((2n-k)\,x\right) - \cos\left((2n+k)\,x\right) \\
&\qquad = \Big(\cos(2n\,x)\cos(-k\,x) - \sin(2n\,x)\sin(-k\,x)\Big) \\
&\qquad\qquad - \Big(\cos(2n\,x)\cos(k\,x) - \sin(2n\,x)\sin(k\,x)\Big) \\
&\qquad\qquad\qquad = 2\,\sin(2n\,x)\sin(k\,x)
\end{aligned}$$

Damit können wir

$$\begin{aligned}
g_n(x) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\left(\cos\left((2n-k)\,x\right) - \cos\left((2n+k)\,x\right)\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{\cos\left((2n-k)\,x\right)}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\cos\left((2n+k)\,x\right)}{k} \\
&= \sum_{i=n}^{2n-1} \frac{\cos(i\,x)}{2n-i} - \sum_{j=2n+1}^{3n} \frac{\cos(j\,x)}{j-2n}
\end{aligned} \tag{5}$$

schreiben. Die Indexverschiebungen zeigen: Wir haben cos-Terme im Frequenzbereich n bis $3n$, wobei nur die Frequenz $2n$ fehlt.

Folgende Rechnung zeigt uns, dass die Frequenzbereiche zweier aufeinanderfolgender Reihenglieder von f keine Überschneidung haben.

$$N_{j+1} = 2^{(j+1)^2} = 2^{j^2+2j+1} = N_j \cdot 2^{2j+1} \geq 2^3 \cdot N_j > 3 \cdot N_j$$

Wir sehen also, dass für jedes $k \in \mathbb{N}$ der Faktor $\cos(k\,x)$ höchstens einmal in der Reihe f auftaucht. Wir könnten z.B. für eine geignete Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Reihe f folgendermaßen schreiben:

$$f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=N_j}^{N_{j+1}-1} a_k\,\cos(k\,x) \tag{6}$$

Dabei sind die $a_k = 0$ für $k = 2\,N_j$ und für k mit $3\,N_j < k < N_{j+1}$, für alle $j \in \mathbb{N}$.

Sei $\{1, \cos(k\,x), \sin(k\,x) \mid k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$ ein Orthonormalsystem, desbezüglich wir die Fourierreihe von f bestimmen wollen. f konvergiert gleichmäßig, somit können wir die Integrale in die Reihe „hineinziehen". Die Sinus-Koeffizienten werden alle sicher 0 sein, die Cosinus-Koeffizienten entsprechen den a_k (wie oben).

$$f(x) \sim S_n(x) := \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(k\,x)$$

Man könnte also sagen, dass die Fourierreihe der „ausgepackten" Reihe f entspricht.

Behauptung 3 *Die Fourierreihe von f konvergiert in 0 nicht punktweise gegen f.*

Beweis:

Es ist klar, dass jede konvergente Folge auch eine Cauchy-Folge ist. Es gibt dann zu jedem $\varepsilon > 0$ ein n_0 mit $|S_m(x) - S_n(x)| < \varepsilon$ für $m, n > n_0$.

Wir zeigen nun, dass für beliebig großes n_0 und $N_j > n_0$ die Differenz in (7) nicht beliebig klein wird (für n_0 groß genug). Offensichtlich gibt es zu jedem $n_0 \in \mathbb{N}$ ein $j \in \mathbb{N}$, so dass $N_j > n_0$.

$$S_{2N_j}(0) - S_{N_j}(0) = \sum_{k=N_j+1}^{2\,N_j} a_k \;\cos(k\,0) = \sum_{k=N_j+1}^{2\,N_j} a_k \tag{7}$$

Wie diese Summe konkret aussieht, überlegen wir uns mit Hilfe der Cosinus-Darstellung von g_n in (5) und der Definition von f in (3) sowie den bisherigen Überlegungen zur Gestalt der Fourierreihe (für gewisse k ist $a_k = 0$):

$$\sum_{k=N_j+1}^{2\,N_j} a_k = \sum_{k=N_j+1}^{2\,N_j-1} \frac{1}{j^2}\,\frac{1}{2\,N_j - k} = \frac{1}{j^2} \sum_{k=1}^{N_j-1} \frac{1}{k} \tag{8}$$

Um eine geeignete Abschätzung für diese Summe zu erhalten, benutzen wir die folgende Behauptung.

Behauptung 4 *Sei $f : [1, \infty[\to \mathbb{R}$ eine monoton fallende Funktion, sei $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:*

$$\sum_{k=1}^{n-1} f(k) \geq \int_1^n f(x) \mathrm{d}x$$

Beweis:

Man definiert eine Treppenfunktion

$$\tilde{f} : [1, \infty[\to \mathbb{R}, \quad \tilde{f}(x) = f(\lfloor x \rfloor) \quad \text{mit} \lfloor x \rfloor \in \mathbb{N} \text{ und } \lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1.$$

Da f monoton fallend ist, so gilt $f(x) \leq \tilde{f}(x)\ \forall x \in [1, \infty[$. Man integriert beide Funktionen, und es gilt für $n \in \mathbb{N}$:

$$\int_1^n f(x) \mathrm{d}x \leq \int_1^n \tilde{f}(x) \mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n-1} f(k)$$

(Man vergleiche mit dem Beweis für das Cauchy'sche Integralkriterium.) □

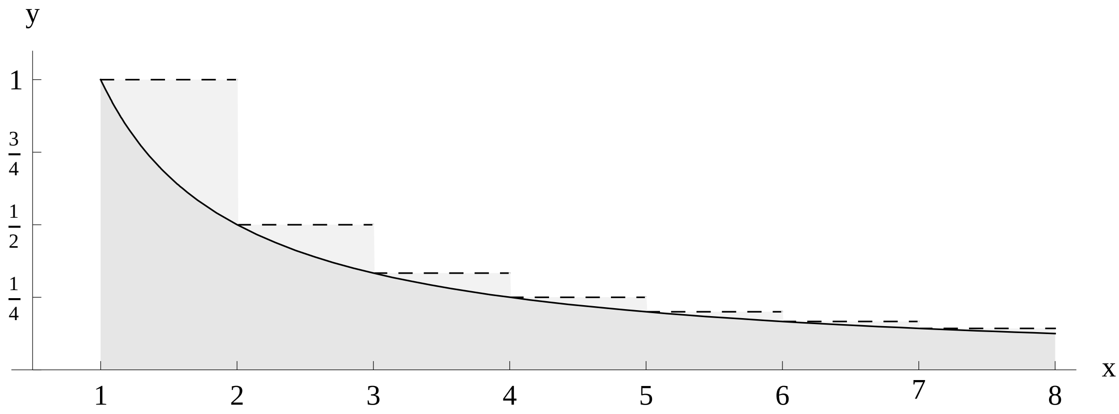

Abbildung 1: Die linke Rechtecksumme wird durch das Integral der Funktion nach unten abgeschätzt. Die abgebildete Funktion ist $x \mapsto y = \frac{1}{x}$.

Wir wenden nun diese Behauptung auf (8) an:

$$\frac{1}{j^2} \sum_{k=1}^{N_j-1} \frac{1}{k} \geq \frac{1}{j^2} \int_1^{N_j} \frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{1}{j^2} \log\left(N_j\right) = \frac{1}{j^2} \log\left(2^{(j^2)}\right) = \log 2 \tag{9}$$

Also ist $S_{2N_j}(0) - S_{N_j}(0) \geq \log 2 \;\; \forall j \in \mathbb{N}$. Damit ist $S_n(0)$ keine Cauchy-Folge, demnach auch nicht konvergent. Weil somit die Fourierreihe nicht konvergiert, hat sie sicher keinen Grenzwert, der gleich $f(0)$ wäre. $\square$

4 Abschließende Bemerkungen

Wir haben nun also mit der Funktion f eine stetige, 2π-periodische, beschränkte Funktion gefunden, deren Fourierreihe in mindestens einem Punkt (nämlich in 0) nicht (punktweise) konvergiert.

Dies zeigt uns, dass wir für punktweise Konvergenz der Fourierreihe noch stärkere Bedingungen (z.B. hölderstetig oder stückweise stetig differenzierbar) an die Funktion stellen müssten, bzw. nicht die Konvergenz der Fourierreihe, sondern einer abgeleiteten Reihe (z.B. der Fejér-Mittel) betrachten müssten.

Literatur

[Bla92] Chr. Blatter. *Analysis 2*. Springer, 3rd edition, 1992.