10. März 2008

DIE BERNOULLISCHEN POLYNOME UND ZAHLEN

OLAF MERKERT

1. Definition

$$B_0(x) := 1, \tag{1}$$

$$B_n'(x) := n \cdot B_{n-1}(x), \quad n \geq 1 \tag{2}$$

$$\int_0^1 B_n(t)\,\mathrm{d}t = 0, \quad n \geq 1 \tag{3}$$

$$B_n := B_n(0) \tag{4}$$

2. Formeln

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot B_k \cdot x^{n-k}, \quad n \geq 0 \tag{5}$$

$$B_1(x) = x - \frac{1}{2}, \qquad B_1 = -\frac{1}{2}$$

$$B_n = n \cdot \int_0^1 x \cdot B_{n-1}(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \frac{n}{n-k+1} B_k, \quad n \geq 2 \tag{6}$$

$$B_n(1) = B_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k \quad \text{für} \quad n \neq 1 \tag{7}$$

B_0	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	B_7	B_8	B_9	B_{10}	B_{11}
1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	0	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{1}{42}$	0	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{5}{66}$	0

3. Funktionalgleichung

Satz 1. *Die Bernoullischen Polynome erfüllen die Funktionalgleichung*

$$B_n(x+1) - B_n(x) = n \cdot x^{n-1} \quad \textit{für } n \geq 1.$$

Falls $P(x)$ ein Polynom ist und ebenfalls diese Funktionalgleichung für ein $n \in \mathbb{N}$ erfüllt, so gibt es ein c, so dass $P(x) = c + B_n(x)$.

Korollar 1. $B_{2m+1} = 0$ *für* $m \geq 1$

4. Potenzsummen natürlicher Zahlen

Satz 2. *Es gilt*

$$\sum_{k=1}^{N} k^n = \frac{N^n}{2} + \frac{1}{n+1} \sum_{0 \leq k \leq \frac{n}{2}} \binom{n+1}{2\,k} \cdot B_{2k} \cdot N^{n-2k+1}, \quad n, N \in \mathbb{N}$$

5. Erzeugende Funktion

Satz 3. *Es gilt für* $0 < |t| < 2\,\pi$ *und alle* x

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(x)}{n!} t^n = \frac{t\,e^{x\,t}}{e^x - 1}.$$

Literatur

[1] Max Koecher: *Klassische elementare Analysis*, Birkhäuser Verlag, Basel, 1987, pp. 163-176