Vektorprodukt - Beweise

Olaf Merkert

17. November 2005

Zusammenfassung

Dieses Dokument enthält Beweise für das Distributivgesetz für das Vektorprodukt und das "Verschieben" von Linearfaktoren. Die Beweise werden in Koordinatenschreibweise durchgeführt und von anschaulichen Grafiken begleitet.

1 Distributivgesetz

$$\vec{a} \times \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$$

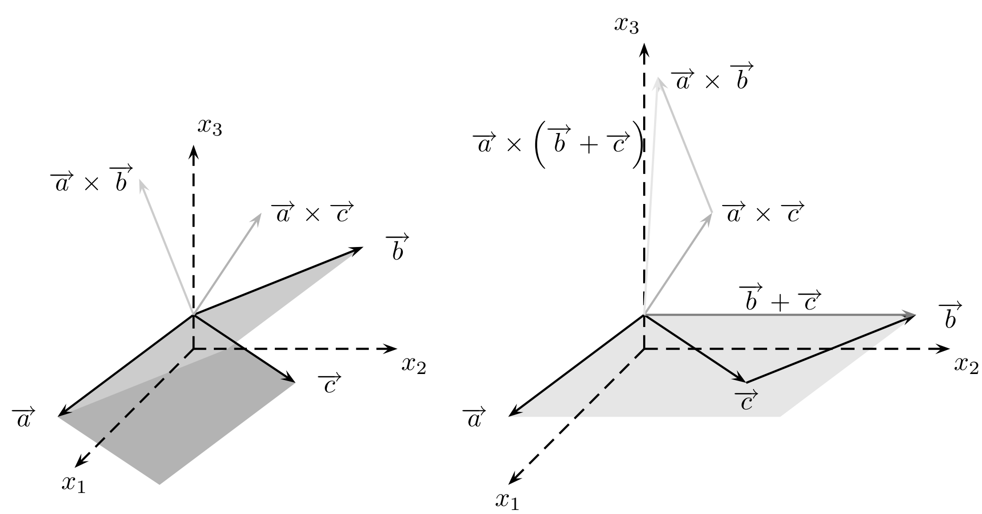

Abbildung 1: Grafik zur Veranschaulichung des Distributivgesetzes

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \left[\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 + c_1 \\ b_2 + c_2 \\ b_3 + c_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_2(b_3 + c_3) - a_3(b_2 + c_2) \\ a_3(b_1 + c_1) - a_1(b_3 + c_3) \\ a_1(b_2 + c_2) - a_2(b_1 + c_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 c_3 - a_3 c_2 \\ a_3 c_1 - a_1 c_3 \\ a_1 c_2 - a_2 c_1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

q.e.d.

2 Linearfaktoren

$$\overrightarrow{a} \times (k\,\overrightarrow{b}) = (k\,\overrightarrow{a}) \times \overrightarrow{b} = k\,(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b})$$

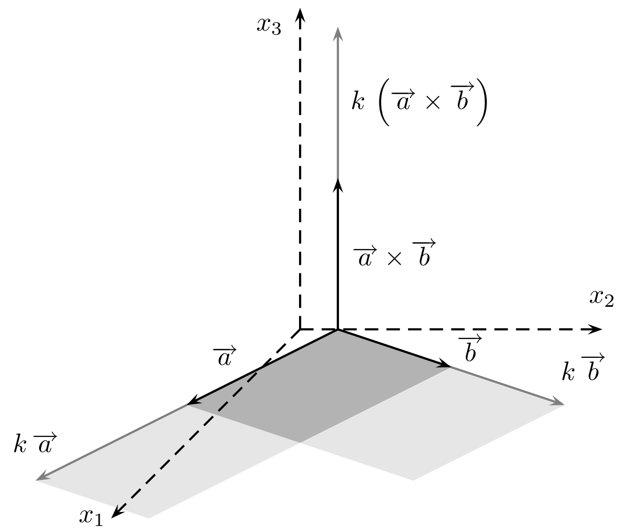

Abbildung 2: Grafik zur Veranschaulichung des Verschieben der Linearfaktoren

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} k\,b_1 \\ k\,b_2 \\ k\,b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 k\,b_3 - a_3 k\,b_2 \\ a_3 k\,b_1 - a_1 k\,b_3 \\ a_1 k\,b_2 - a_2 k\,b_1 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} k\,a_1 \\ k\,a_2 \\ k\,a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k\,a_2 b_3 - k\,a_3 b_2 \\ k\,a_3 b_1 - k\,a_1 b_3 \\ k\,a_1 b_2 - k\,a_2 b_1 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

$$k \left[\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \right] = k \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

q.e.d.